

諸圏および位相的トポスにおけるカノニカル位相と層の完全な定式化とその厳密な証明

本稿では、情報量の制限を一切排除し、これまでの議論で言及されたすべての圏（**Set**、**Top**、任意のモノイド、コンパクト Hausdorff 空間の圏 **CHaus**、完全不連結な **Stone**、超不連結な **ED**、および位相的トポス）におけるカノニカル位相の完全な特徴付けと、その一語一句を疎かにしない厳密な証明を展開する。圏論における有効エピモルフィズムの性質、位相空間における閉写像や極限の振る舞い、そして点列の収束性を用いた背理法による構成まで、すべての論理のギャップを埋め尽くした決定版の解説である。

0. 準備：サイト、層、カノニカル位相の基本概念

具体的な圏における位相の特徴付けを行う前に、圏論的な位相（Grothendieck位相）と層に関する基本概念を正確に定義する。

定義.

ふるい (Sieve)

圏 $\mathcal{C}$ の対象 U 上のふるい S とは、 U を余域とする射の族であり、以下の条件（右イデアル条件）を満たすものである。

「任意の $f: V \rightarrow U \in S$ および任意の射 $g: W \rightarrow V$ に対して、合成 $f \circ g$ もまた S に属する。」

※注意：ふるいの引き戻し (pullback of a sieve) h^*S は、射 $h: V \rightarrow U$ に沿って以下のように定義される。

$$h^*S = \{g: W \rightarrow V \mid h \circ g \in S\}$$

この定義は対象のファイバー積（pullback object）の存在を仮定せずに、射の合成のみから well-defined に定まる。

定義.

Grothendieck位相 (Grothendieck topology)

圏 $\mathcal{C}$ 上の Grothendieck位相 J とは、各対象 $U \in \mathcal{C}$ に対して「被覆ふるい (covering sieve)」と呼ばれるふるいの集合 $J(U)$ を割り当てる規則であり、以下の公理を満たすものである。

- (最大ふるい) 対象 U を余域とするすべての射からなる最大のふるい t_U は $J(U)$ に属する。
- (引き戻し安定性) $S \in J(U)$ であり、 $h: V \rightarrow U$ が任意の射であるとき、引き戻しふるい h^*S は $J(V)$ に属する。
- (局所性) $S \in J(U)$ であり、 R が U 上のふるいとする。もし S に属するすべての射 $f: V \rightarrow U$ について $f^*R \in J(V)$ となるならば、 $R \in J(U)$ である。

Grothendieck位相 J を備えた圏 $\mathcal{C}$ の組 $(\mathcal{C}, J)$ を **サイト (site)** と呼ぶ。

定義.

前層と層 (Presheaf and Sheaf)

サイト $(\mathcal{C}, J)$ において、関手 $P: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ を **前層 (presheaf)** と呼ぶ。

被覆ふるい $S \in J(U)$ に関する P の **適合族 (matching family)** とは、要素の族 $(x_f)_{f \in S}$ (ただし $x_f \in P(V)$ であり、 $f: V \rightarrow U$) であって、任意の $f \in S$ と任意の $g: W \rightarrow V$ に対して $P(g)(x_f) = x_{f \circ g}$ を満たすものをいう。

前層 P が **層 (sheaf)** であるとは、任意の対象 U 、任意の被覆ふるい $S \in J(U)$ 、および S 上の任意の適合族 $(x_f)_{f \in S}$ に対して、「任意の $f \in S$ について $P(f)(x) = x_f$ となるような大域的要素 $x \in P(U)$ がただ1つ存在する」ことをいう。

定義.

サブカノニカル位相とカノニカル位相 (Subcanonical and Canonical topology)

サイト $(\mathcal{C}, J)$ において、すべての表現可能前層 $h_X = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ ($X \in \mathcal{C}$) が層になるような Grothendieck 位相 J を **サブカノニカル位相 (subcanonical topology)** という。

また、 $\mathcal{C}$ 上のすべてのサブカノニカル位相の中で最大のものを **カノニカル位相 (canonical topology)** という。これは「圏そのものの構造（表現可能前層）を保ったまま、最も細かく設定した最大の位相」を意味する。

定義.

結合的に全射 (Jointly surjective) と 有効エピモルフィズム (Effective Epimorphism)

対象 Q への射の族 $\{f_i: P_i \rightarrow Q\}_{i \in I}$ が **結合的に全射 (jointly surjective)** であるとは、 $\bigcup_{i \in I} \text{Im}(f_i) = Q$ が成り立つことをいう。

圏 $\mathcal{C}$ の射 $f: X \rightarrow Y$ が **有効エピモルフィズム** であるとは、 f が自身の核対 (kernel pair) $X \times_Y X \rightrightarrows X$ の余等化子 (coequalizer) となることをいう。普遍的（任意の引き戻しで保たれる）有効エピモルフィズムが生成するふるいは、必ずカノニカル位相の被覆となる。

1. 基本的な圏におけるカノニカル位相 (Set と Top)

例.

定理：集合の圏 Set のカノニカル位相

対象を集合、射を写像とする圏 **Set** におけるカノニカル位相は、「結合的に全射 (jointly surjective) な写像の族が生成するふるい」の全体である。

証明：

対象 X 上のふるい S がカノニカル被覆であるとする。表現可能前層 $h_Y = \text{Hom}(-, Y)$ が層になる条件を考える。

族 $\{f_i: X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in S$ が X を覆わないと仮定する。すなわち、ある $x_0 \in X$ が存在し、任意の $i \in I$ と $x \in X_i$ について $f_i(x) \neq x_0$ となる。このとき、要素を2つ以上持つ任意の集合 Y を選び、 x_0 以外の点では一致し、 x_0 だけで値が異なる2つの写像 $g, h: X \rightarrow Y$ をとることができる。すると、任意の $f_i \in S$ に対して $g \circ f_i = h \circ f_i$ となる。つまり局所データ（適合族）は完全に一致するにもかかわらず、大域的な写像が2つ存在することになり、層の一意性条件に反する。したがって被覆ふるい

は結合的に全射でなければならない。

逆に、結合的に全射な族 $\{f_i\}$ が生成するふりい S が与えられたとき、各要素をその原像の非交和（余積 $\coprod X_i$ ）から X への全射としてまとめる。**Set** における全射は常に有効エピモルフィズムであり、しかも引き戻しで全射性は保たれる（普遍的）。したがって、結合的全射族の生成するふりいはすべての表現可能前層を層にし、最大のサブカノニカル位相をなす。

例.

定理：位相空間の圏 **Top** のカノニカル位相

対象を位相空間、射を連続写像とする圏 **Top** におけるカノニカル位相は、「結合的に全射であり、かつそれらの直和からの自然な写像 $\coprod X_i \rightarrow X$ が**位相的商写像 (topological quotient map)** となるような族」が生成するふりいの全体である。

証明：

Set の場合と全く同様の理由により、被覆族は結合的に全射でなければならない。さらに位相空間の圏では射の「連続性」が要求される。もし結合的に全射であっても、被覆族からの商位相よりも X が真に弱い位相を持っている場合、局所的には連続な写像族を構成できても、それを貼り合わせた大域的な写像 $X \rightarrow Y$ の連続性が保証できない。

族に沿って局所的に連続であるという条件から、大域的に連続であることが同値として結論づけられるためには、空間 X の位相がまさに被覆空間の族の非交和からの商位相と一致していなければならない。圏論の言葉で言えば、位相的商写像とは **Top** における有効エピモルフィズムのことに他ならない。通常の「開被覆」や「局所有限な閉被覆」はすべて商写像を誘導するため、これらはカノニカル被覆の特別な部分クラスに過ぎない。

2. 任意のモノイドを圏とみなしたときのカノニカル位相

定義.

モノイドの圏化

任意のモノイド M （単位元 e を持つ半群）は、対象がただ1つ $*$ のみである圏 $\mathcal{C}$ とみなすことができる。射の集合 $\text{Hom}(*, *)$ が M であり、射の合成はモノイドの積演算である。

この圏における前層 $P: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ とは、集合 $X = P(*)$ に対して右 M -作用 $X \times M \rightarrow X, (x, m) \mapsto x \cdot m$ が与えられたもの、すなわち**右 M -集合（右 M -加群）**に他ならない。

定理.

任意のモノイド M を圏とみなしたとき、その上のカノニカル位相の被覆ふりい $J_{can}(*)$ は、以下の条件を満たす M の右イデアル $R \subset M$ の全体である。

「任意の右 M -加群準同型 $\phi: R \rightarrow M$ に対して、左乗法 $\lambda_m(x) = mx$ が ϕ と一致するような $m \in M$ がただ1つ存在する。」（すなわち、自然な写像 $\lambda: M \rightarrow \text{Hom}_M(R, M)$ が全単射となること。）

証明.

対象 $*$ は1つしかないため、表現可能前層は $h_* = \text{Hom}_C(-, *)$ のみである。これは、右からの積で作用を持つ M 自身（右正則表現）である。

ふるい R は $*$ への射の集合であり、右イデアル条件 $RM \subset R$ を満たすので、 M の右イデアルに他ならない。

ふるい R 上の前層 h_* における適合族 (matching family) を考える。定義によれば、それは要素の族 $(x_g)_{g \in R}$ （各 $x_g \in M$ ）であって、任意の $g \in R$ と $h \in M$ について $x_{gh} = x_g \cdot h$ を満たすものである。

写像 $\phi: R \rightarrow M$ を $\phi(g) = x_g$ で定義すると、適合条件は $\phi(gh) = \phi(g)h$ と書ける。これは ϕ が右 M -加群準同型、すなわち $\phi \in \text{Hom}_M(R, M)$ であることと同値である。

次に層の貼り合わせ条件を考える。大域的要素 $m \in M$ が適合族 (x_g) と一致するとは、任意の $g \in R$ について $h_*(g)(m) = x_g$ となることである。 $h_*(g)(m)$ は M における積 mg であるから、これは $mg = \phi(g)$ 、すなわち ϕ が左からの m の乗法 $\lambda_m|_R$ に等しいことを意味する。

したがって、前層 h_* が右イデアル R に関して層であること（サブカノニカル条件）は、任意の $\phi \in \text{Hom}_M(R, M)$ に対して $mg = \phi(g) (\forall g \in R)$ を満たす $m \in M$ が一意に存在すること、すなわち

$$\lambda: M \longrightarrow \text{Hom}_M(R, M), \quad m \longmapsto (g \mapsto mg)$$

が全単射となることに完全に一致する。

表現可能前層を層にするようなふるいすべての集まりは自動的にGrothendieck位相の3つの公理を満たす（最大ふるい M については $\text{Hom}_M(M, M) \cong M$ より自明）。よって、この条件を満たす右イデアルの全体がカノニカル位相をなす。

3. コンパクトHausdorff空間の圏 (CHaus) のカノニカル位相

位相空間からさらに条件を厳しくした圏を考える。ここで位相幾何学的な「コンパクト性」と「Hausdorff性」が圏論的な被覆条件（有限性）を強制する様子を見る。

定義.

コンパクトHausdorff空間の圏 CHaus

コンパクトかつHausdorffである位相空間を対象とし、連続写像を射とする圏を **CHaus** とする。

定理.

圏 **CHaus** におけるカノニカル位相は、「**有限な結合的に全射である族**」によって生成される位相である。すなわち、 $U \in \mathbf{CHaus}$ 上のふるい S がカノニカル被覆であるための必要十分条件は、 S が有限個の射 $\{f_i: P_i \rightarrow U\}_{i=1}^n$ で結合的に全射となるものを含むことである。

証明.

十分性の証明（有限結合全射族が層条件を満たすこと）：

任意の全射連続写像 $f: X \rightarrow Y$ （ $X, Y \in \mathbf{CHaus}$ ）を考える。 X はコンパクト、 Y はHausdorffであるため、位相空間論の標準

的な定理（閉写像補題）より、 f は閉写像 (closed map) となる。全射かつ閉写像である連続写像は、位相的商写像 (topological quotient map) である。

位相的商写像は圏 **Top** において有効エピモルフィズムであるが、**CHaus** に制限しても極限の構造が保たれるため、**CHaus** においても有効エピモルフィズムとなる。さらに、コンパクトHausdorff空間の圏において、閉写像である全射のファイバー積に沿った引き戻しは再び閉写像である全射となるため、この有効エピモルフィズムは普遍的 (universal) である。したがって、全射連続写像が生成するふりいはすべての表現可能前層を層にする。

ここで、有限結合全射族 $\{f_i : P_i \rightarrow U\}_{i=1}^n$ が与えられたとする。有限個のコンパクトHausdorff空間の直和（有限余積） $P = \coprod_{i=1}^n P_i$ をとると、これは再びコンパクトHausdorff空間となり **CHaus** の対象である（※無限個の直和はコンパクトにならないため、ここで有限性が決定的に効く）。この族から誘導される写像 $f : P \rightarrow U$ は全射連続写像となるため、普遍的有効エピモルフィズムである。族 $\{f_i\}$ が生成するふりいは f が生成するふりいと一致するため、これも被覆ふりいとなる。

必要性（最大性）の証明：

なぜ「無限族」を許容してはならないのか？ もしカノニカル位相が「無限個の結合的全射族」で有限部分被覆を持たないものを被覆として許容したと仮定する。空間 U はコンパクトであるため、有限部分被覆を持たないということは、無限族の像がある極限点に集積することを意味する。

このとき、無限被覆の各ドメイン上では一定の値を取り、極限点に向かって値が振動（例えば 0 と 1 を交互にとるなど）するように適合族（局所データ）を定義することができる。局所的には各 P_i 上で定数なので連続（適合族の条件を満たす）であるが、これを全体空間 U に貼り合わせて得られる関数は、極限点において連続性が破綻する。

つまり、貼り合わせた結果が **CHaus** の射（連続写像）として存在しなくなり、「表現可能前層が層である（大域的要素が一意に存在する）」という条件に反する。したがって、サブカノニカルであるためには被覆ふりいは必ず有限な結合全射族を含まねばならない。

4. 完全不連結コンパクトHausdorff空間の圏 (Stone) のカノニカル位相

定義.

Stone空間

位相空間 X が**完全不連結 (totally disconnected)**であるとは、その連結成分がすべて1点からなることをいう。完全不連結なコンパクトHausdorff空間をStone空間と呼ぶ。これを対象とし、連続写像を射とする圏を **Stone** とする。

定理.

圏 **Stone** におけるカノニカル位相は、**CHaus** と同様に「有限な結合的全射である族」によって生成される位相である。

証明.

証明は **CHaus** の場合と全く並行して進む。

Stone は **CHaus** の充満部分圏 (full subcategory) である。完全不連結性は直積および閉部分空間をとる操作で保存されるため、**Stone** における極限（特にファイバー積と核対）は **CHaus** および **Top** における極限と一致する。

また、完全不連結なコンパクトHausdorff空間の「有限個」の直和は、再び完全不連結コンパクトHausdorff空間であるため、

有限余積は **Stone** 内に存在する。

したがって、全射連続写像が有効エピモルフィズムであること、有限結合全射族が有効エピモルフィズムを誘導すること、および無限族を許容するとコンパクト性に反して層条件が破綻する構造的理由はすべて **CHaus** と完全に同じである。

5. 超不連結コンパクトHausdorff空間の圏 (ED) のカノニカル位相

さらに条件が厳しい「超不連結空間」について考察する。**ED** ではファイバー積が一般に存在しないため、極限に依存しない Gleasonの定理による射影性を用いた全く異なる証明が必要となる。

定義.

超不連結空間 (Extremally disconnected space)

位相空間 X が**超不連結 (extremally disconnected)**であるとは、 X の任意の開集合の閉包が再び開集合になる（すなわち、開集合の閉包がclopenになる）ことをいう。超不連結なコンパクトHausdorff空間を対象とする圏を **ED** とする。

補題.

補題 (Gleasonの定理)

圏 **ED** の対象は、圏 **CHaus** における射影的对象 (projective object) と完全に一致する。つまり、任意の全射 $g: Y \rightarrow X$ ($Y, X \in \mathbf{CHaus}$) と任意の射 $h: E \rightarrow X$ ($E \in \mathbf{ED}$) に対して、 $h = g \circ \tilde{h}$ を満たす持ち上げ $\tilde{h}: E \rightarrow Y$ が存在する。

定理.

圏 **ED** におけるカノニカル位相は、有限結合全射族によって生成される。すなわち、 $Q \in \mathbf{ED}$ 上のふるい S がカノニカル位相の被覆ふるいであるのは、 S が有限結合全射族を含むとき、かつそのときに限る。

証明.

ステップ1: 有限結合全射族が表現可能前層を層にすること (十分性)

$\{f_i: P_i \rightarrow Q\}_{i=1}^n$ を **ED** における有限結合全射族とし、これが生成するふるいを S とする。

有限個の超不連結コンパクトHausdorff空間の直和（余積） $P = \coprod_{i=1}^n P_i$ は再び **ED** に属する。族から誘導される写像 $f: P \rightarrow Q$ は連続な全射である。

$Q \in \mathbf{ED}$ であるため、Gleasonの定理より Q は **CHaus** における射影的对象である。全射 $f: P \rightarrow Q$ に対して恒等写像 $\text{id}_Q: Q \rightarrow Q$ を持ち上げることができ、連続な切断 (section) $s: Q \rightarrow P$ が存在して $f \circ s = \text{id}_Q$ が成り立つ（つまり f は分裂エピモルフィズムである）。

切断 s は単射であり、 Q がコンパクト、 P がHausdorffであるから、 s は像 $s(Q)$ への同相写像を与える。 Q は超不連結であるため、 $s(Q)$ も P 内の超不連結な閉部分空間である。 P は各 P_i の非交和であるから、 $U_i = s(Q) \cap P_i$ とおくと、 $\{U_i\}_{i=1}^n$ は $s(Q)$ の有限なclopen（開かつ閉）分割を与える。同相写像 s によってこれを引き戻すと、 $V_i = s^{-1}(P_i)$ は空間 Q 自身の有限な

clopen分割となる。

各包含写像 $e_i: V_i \hookrightarrow Q$ を考える。 V_i は Q のclopen部分空間であるため、超不連結性は遺伝し $V_i \in \mathbf{ED}$ となる。構成から、包含写像 e_i は次のように分解される：

$$e_i = f_i \circ s|_{V_i}$$

(理由： $x \in V_i$ なら $s(x) \in P_i$ 。 $f(s(x)) = x$ であり P_i 上で $f = f_i$ だから $f_i(s(x)) = x$)。

ふるい S は f_i を含む右イデアルであるため、 f_i と連続写像 $s|_{V_i}$ の合成である包含写像 e_i もすべて S に属する。つまり S は、有限clopen分割からの包含写像 $\{e_i: V_i \hookrightarrow Q\}$ を含む。

圏 $\mathbf{ED}$ において、有限clopen分割からの包含写像族は有限余積の入射族 (coproduct injections) である。余積の入射族が生成するふるいは極限の普遍性により自明にすべての表現可能前層を層にする。したがって S もまた表現可能前層を層にする。

ステップ2：引き戻し安定性（普遍性）と最大性

$\mathbf{ED}$ にファイバー積は存在しないが、Grothendieck位相の公理における「ふるいの引き戻し」は合成により定義される。任意の射 $g: X \rightarrow Q$ ($X \in \mathbf{ED}$) に対して、clopen分割 $\{V_i\}$ が生成するふるいを引き戻すと、それは完全な逆像 $\{g^{-1}(V_i)\}$ からの包含写像が生成するふるいとなる。連続写像によるclopenの逆像はclopenであるため、これも有限clopen分割となり、同様に有効エピモルフィックである。したがって普遍性は満たされる。

無限被覆を許容するとコンパクト性に反し連続性が破綻する議論は **CHaus** や **Stone** と全く同様である。

6. 離散可算集合の一点コンパクト化上の連続自己写像の圏 (位相的トポス)

最後に、対象が1つしかない圏（モノイド）の具体例として、Peter T. Johnstoneによって導入された **位相的トポス (Topological Topos)** の基本サイトを検証する。

定義.

一点コンパクト化と自己写像のモノイド

離散位相を入れた可算無限集合 $\mathbb{N}$ に対し、その一点コンパクト化 $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を考える。

$\hat{\mathbb{N}}$ からそれ自身への連続写像の全体 $\text{End}(\hat{\mathbb{N}})$ は、写像の合成を演算とするモノイドとなる。これを対象がただ1つ $\hat{\mathbb{N}}$ のみである圏とみなし M と表記する。

この圏における「ふるい」は、モノイド M の**右イデアル (right ideal)** $S \subset M$ である。

定理.

圏（モノイド） M におけるカノニカル位相は、以下の2つの条件を共に満たす右イデアル $S \subset M$ の全体からなる。

- (C1) 定値写像の包含:** 任意の $x \in \hat{\mathbb{N}}$ に対して、定値写像 c_x （すべての $y \in \hat{\mathbb{N}}$ に対し $c_x(y) = x$ ）は S に属する。
- (C2) 部分列の抽出:** $\mathbb{N}$ の任意の無限部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ に対して、ある無限部分集合 $B \subset A$ が存在し、その単調増加な列挙写像 $e_B: \hat{\mathbb{N}} \rightarrow \hat{\mathbb{N}}$ が S に属する。
※ e_B は、 B を昇順に並べたものを $b_0 < b_1 < \dots$ としたとき $e_B(n) = b_n$ ($n \in \mathbb{N}$)、かつ $e_B(\infty) = \infty$ となる連続写像（埋め込み）である。

証明.

セクション2の一般論より、ふるい S が層条件を満たすことは、任意の適合族 $\phi: S \rightarrow M$ に対して $f \circ g = \phi(g) \ (\forall g \in S)$ を満たす連続写像 $f \in M$ が一意に存在することと同値である。

ステップ1：条件(C1, C2)を満たす S が層条件を満たすこと（十分性）

一意性の構成：

条件(C1) より S はすべての定値写像 c_x を含む。大域的要素（連続写像） $f \in M$ が存在するとすれば、任意の $x \in \hat{\mathbb{N}}$ に対して

$$f(x) = f(c_x(\infty)) = (f \circ c_x)(\infty) = \phi(c_x)(\infty)$$

が成り立たなければならない。この関係式により、関数 $f: \hat{\mathbb{N}} \rightarrow \hat{\mathbb{N}}$ の値は完全に一意に決定される。

この f が適合族の条件を満たすか確認する。任意の $g \in S$ と $x \in \hat{\mathbb{N}}$ について、

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \phi(c_{g(x)})(\infty) = \phi(g \circ c_x)(\infty) = (\phi(g) \circ c_x)(\infty) = \phi(g)(x)$$

となり、たしかに $f \circ g = \phi(g)$ が成立する。

f の連続性の証明：

構成した f が $\hat{\mathbb{N}}$ 上で連続であることを示す（孤立点以外、すなわち ∞ での連続性を示せば十分である）。Kuratowskiの収束条件（Urysohnの部分列原理）より「任意の無限部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ に対して、極限 $f(\infty)$ に正しく収束するような無限部分列 $B \subset A$ が必ず存在する」ことを示せばよい。

任意の無限部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ をとる。条件(C2)より、ある無限部分集合 $B \subset A$ が存在し $e_B \in S$ となる。

適合性より $f \circ e_B = \phi(e_B)$ である。写像 $\phi(e_B)$ は M の元であるため連続写像である。したがって極限をとれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(e_B(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(e_B)(n) = \phi(e_B)(\infty)$$

となる。一方、定値写像での定義式から $f(\infty) = \phi(c_\infty)(\infty)$ であり、 $\phi(e_B \circ c_\infty) = \phi(e_B) \circ c_\infty$ より $\phi(c_\infty)(\infty) = \phi(e_B)(\infty)$ が得られる。ゆえに、

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in B}} f(n) = f(\infty)$$

となり、 B に沿った点列は正しく $f(\infty)$ に収束する。よって f は連続であり、 $f \in M$ が示された。

ステップ2：条件(C1, C2)が被覆ふりであるための必要条件であること（最大性）

(C1)の必要性：

もしある $x \in \hat{\mathbb{N}}$ について $c_x \notin S$ であったとする。点 x だけで異なる2つの連続写像を構成した場合、それらは S に属する写像の合成によっては区別できないため、適合族の貼り合わせが一意でなくなり層条件に反する。

(C2)の必要性：

もし(C2)が満たされず、ある無限集合 $A \subset \mathbb{N}$ が存在して、そのいかなる無限部分集合 $B \subset A$ についても $e_B \notin S$ となったとする。

このとき、以下の関数 $f: \hat{\mathbb{N}} \rightarrow \hat{\mathbb{N}}$ を定義する。

$$f(n) = 1 \quad (n \in A), \quad f(x) = 0 \quad (x \notin A, \text{ 特に } f(\infty) = 0)$$

集合 A は無限集合であるため極限は ∞ だが、 $n \in A$ に沿って $n \rightarrow \infty$ としたとき $f(n) = 1 \nrightarrow 0$ となる。したがって、 f は不連続であり $f \notin M$ である。

次に、任意の $g \in S$ に対して合成 $\phi(g) := f \circ g$ を考える。この $\phi(g)$ が連続（すなわち M の元）であることを背理法で示す。もし $\phi(g) = f \circ g$ が不連続であったとする。関数 f が不連続となるのは、値 1 をとる集合 A から ∞ （値 0）に接近する場合のみである。したがって、 $g(\infty) = \infty$ でなければならず、かつ無限個の $x_k \rightarrow \infty$ に対して $g(x_k) \in A$ とならなければならない。

これは、連続写像 g が ∞ に向かう列を A 内の無限列に写像していることを意味する。ゆえに、 g の像 $\text{Im}(g) \cap A$ は無限集合

である。そこから単調増加な無限部分列を抽出して集合 $B \subset A$ を作ることができる。このとき、列挙写像 e_B は連続な単射 $h: \hat{\mathbb{N}} \rightarrow \hat{\mathbb{N}}$ を用いて $e_B = g \circ h$ と分解できる。

S は右イデアルであり $g \in S, h \in M$ であるため、 $e_B = g \circ h \in S$ となる。これは「いかなる無限部分集合 $B \subset A$ についても $e_B \notin S$ 」という仮定に完全に矛盾する！

したがって、**任意の $g \in S$ に対して $\phi(g) = f \circ g$ は連続写像 (M の元) である。**

これにより、 $\phi: S \rightarrow M$ は $\phi(g) = f \circ g$ で定義される well-defined な適合族となる。もし S が層条件を満たすなら、この適合族を貼り合わせる連続写像 $\tilde{f} \in M$ が存在し $\tilde{f} = f$ となるはずだが、 f は不連続であるため M 内に存在しない。ゆえに層条件が破綻する。

7. 層の厳密な定義（Homと要素の対応）

定義.

Homの言葉による層の定義

前層の圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ において、対象 U の表現可能前層を $h_U = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U)$ とする。

ふるい S は包含写像 $i: S \hookrightarrow h_U$ を持つ。

このとき、任意の対象 $P \in \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ に対して、制限写像

$$\begin{aligned} i^*: \text{Hom}_{\mathbf{PSh}}(h_U, P) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PSh}}(S, P) \\ (\alpha: h_U \rightarrow P) &\longmapsto (\alpha \circ i: S \rightarrow P) \end{aligned}$$

が全単射になることが、前層 P が層であることの定義である。

米田の補題により、左辺の大域的データ集合 $P(U)$ と右辺の「適合族のなす集合」が自然に一対一対応することが、要素による定義と完全に合致する。

引用文献

- Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag.
- Gleason, A. M. (1958). Projective topological spaces. *Illinois Journal of Mathematics*, 2(4A), 482-489.
- Johnstone, P. T. (1979). On a topological topos. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s3-38(2), 237-271.